

Analysis III

ÜBUNGSBLATT 2

1. Zeigen Sie:

- (i) Die Familie aller beschränkten (offenen, abgeschlossenen oder halboffenen) Intervalle bildet einen Halbring auf $\mathbb{R}$.
- (ii) Der Durchschnitt zweier Halbringe $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ auf einer Menge X ist im allgemeinen kein Halbring.

2. In der Vorlesung wurde der folgende induktive Prozess zur Erzeugung eines Rings aus einer beliebigen Familie von Teilmengen beschrieben:

Gegeben eine Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen, so definieren wir eine aufsteigende Folge von Familien $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots \subset \mathcal{P}(X)$ durch $\mathcal{F}_0 := \mathcal{E} \cup \{\emptyset\}$ und

$$\mathcal{F}_n := \{A \setminus B, A \cup B \mid A, B \in \mathcal{F}_{n-1}\}$$

für $n \geq 1$. Dann ist die Vereinigung $\mathcal{F}_\infty := \cup_n \mathcal{F}_n$ der von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring.

Zeigen Sie, dass die Inklusionen $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ im allgemeinen alle *strikt* sind.

3. (i) Sind $\mathcal{R}_i$ Ringe auf Mengen X_i mit Erzeugendensystemen $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{R}_i$ für $i = 1, \dots, n$, so wird der Produktring $\mathcal{R}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{R}_n$ auf $X \times \dots \times X_n$ von der Familie von Quadern $\mathcal{E}_1 * \dots * \mathcal{E}_n$ erzeugt.
- (ii) Sind die Ringe $\mathcal{R}_i$ sogar Algebren, so wird die Produktalgebra $\mathcal{R}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{R}_n$ von der Familie von Zylindermengen $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ erzeugt.
4. Sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Halbring und $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ ein Inhalt. Dann gilt für $A, B \in \mathcal{H}$ mit $A \cup B \in \mathcal{H}$, dass

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

5. Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring und sei die von ihm erzeugte Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ echt größer, $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass jeder Inhalt μ auf $\mathcal{R}$ zu einem Inhalt $\bar{\mu}$ auf $\mathcal{A}$ fortsetzbar ist, jedoch im allgemeinen nicht auf eindeutige Weise.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für Teilmengen $A, B \in \mathcal{R}$ stets gilt, dass $\complement A \notin \mathcal{B}$.

① Lösung

(i) Wir bezeichnen die Menge der beschränkten Intervalle mit $\mathcal{K}$

• $\emptyset \in \mathcal{K}$ klar

• Für $I \subseteq \mathbb{R}$ gilt: I ist ein Intervall $\Leftrightarrow I$ konvex

" $\Rightarrow$ " Seien $a < b$ aus $\mathbb{R}$, dann gilt für $t \in [0, 1]$ und $a \leq x, y \leq b$ auch

$$a = (1-t)a + ta \leq (1-t)x + ty \leq (1-t)b + tb = b$$

" $\Leftarrow$ " Ist I konvex, so auch pfadstet. und damit ein Intervall

Da Schnitte von konvexen Mengen konvex sind, folgt, dass Schnitte von Intervallen Intervalle sind.

Falls eines der beiden Intervalle beschränkt ist, so ist auch ihr Schnitt, da dieser darin enthalten ist.

• Ist $J \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, so ist $\mathbb{R} \setminus J = L \cup R$ mit $L, R \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle

Für ein weiteres beschränktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist $I \setminus J = I \cap (\mathbb{R} \setminus J) = (I \cap L) \cup (I \cap R)$ eine disjunkte Vereinigung von beschränkten Intervallen

(ii) $\mathcal{K}_1 := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$ und $\mathcal{K}_2 := \{\emptyset, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ sind Halbringe auf $X = \{1, 2, 3\}$

Aber $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}$ ist kein Halbring mehr, da sich $\{1, 2, 3\} \setminus \{2\} = \{1, 3\}$ nicht als Vereinigung disj. Mengen aus $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ darstellen lässt. $\square$

② Lösung

Da $\emptyset \in \tilde{f}_0 \subseteq \tilde{f}_n$ folgt mit Induktion $\emptyset \in \tilde{f}_{n-1} \Rightarrow A \setminus \emptyset = A \subseteq \tilde{f}_n$ für alle $A \in \tilde{f}_{n-1}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Insbesondere gilt $\tilde{f}_{n-1} \subseteq \tilde{f}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Seien $A, B \in \tilde{f}_n$. Dann gilt $A, B \in \tilde{f}_n$ für n hinreichend groß.

Damit folgt $A \setminus B, A \cup B \in \tilde{f}_{n-1} \subseteq \tilde{f}_n$. Damit ist $\tilde{f}_n$ ein Ring (der $\emptyset$ enthält).

Da jeder Ring $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}$ $\tilde{f}_n$ enthalten muss, folgt, dass $\tilde{f}_n$ der von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring ist. $\square$ $\star$

③ Lösung

(i) Sei $\mathcal{R}_i$ ein Ring auf X_i für $i = 1, \dots, n$ und $E_i \subseteq \mathcal{R}_i$ ein Erzeugendensystem.

Dann wird $\mathcal{R}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{R}_n$ von $E_1 * \dots * E_n$ erzeugt.

Es genügt jeweils den Fall $n = 2$ zu betrachten. Der allg. Fall folgt mit Induktion.

Für $M_2 \in E_2$ betrachten wir $\mathcal{R}'_1 = \{R_1 \in \mathcal{R}_1 : R_1 \times M_2 \in \mathcal{R}\}$, wobei $\mathcal{R}$ den von $E_1 * E_2$ erzeugten Ring bezeichne. Es gilt $E_1 \subseteq \mathcal{R}'_1$, da $E_1 * E_2 \subseteq \mathcal{R}$.

Weiter ist $\mathcal{R}'_1$ angesichts $(A \times M_2) \cup (B \times M_2) = (A \cup B) \times M_2$ und $(A \times M_2) \setminus (B \times M_2) = (A \setminus B) \times M_2$ für $A, B \in \mathcal{R}'_1$ $\cup$ -stabil und $\setminus$ -stabil.

Damit folgt $\mathcal{R}'_1 = \mathcal{R}_1$. Da $M_2 \in E_2$ bel., folgt $\mathcal{R}'_2 = \{R_2 \in \mathcal{R}_2 : R_1 \times R_2 \in \mathcal{R}\} = \mathcal{R}_2$

wegen $R_1 \in \mathcal{R}_1$ bel., folgt $\mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}$. Da $\mathcal{R}$ ein Ring ist folgt weiter $\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}$.

Die Inklusion $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2$ gilt offensichtlich. $\square$

(ii) Sind $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sogar Algebren, so wird $\mathcal{R}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{R}_n$ von den Zylindermengen $\mathcal{Z}(E_1, \dots, E_n)$ erzeugt

Sei $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{Z}(E_1, \dots, E_n)$ erzeugte Ring. Nach (i) genügt es z.z., dass $E_1 \times \dots \times E_n \subseteq \mathcal{R}$. Für $M_i \in \mathcal{E}_i$, $i=1, \dots, n$ ist

$$M_1 \times \dots \times M_n = (M_1 \times X_1 \times \dots \times X_n) \cap \dots \cap (X_1 \times \dots \times X_{n-1} \times M_n) \in \mathcal{R}, \text{ da } \mathcal{R} \text{ n-stabil.}$$

□

★ Sei X eine unendliche Menge. Sei $\mathcal{E}$ die Menge der Einpunktmengen.

Mit Induktion folgt $|\mathcal{E}| = 2^n$ für $A \in \mathcal{F}_n$ und, dass $\mathcal{F}_n$ alle Mengen der Größe 2^n enthält.

Daraus folgt $\mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{F}_n \subsetneq$

④ Lösung

Da $\mathcal{R}$ ein Halbtring ist, existiert paarweise disjunkte Mengen $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{R}$ und $D_1, \dots, D_m \in \mathcal{R}$, s.d.

$$A \cap B = C_1 \cup \dots \cup C_n \quad \text{und} \quad B \cap A = D_1 \cup \dots \cup D_m.$$

$$\text{Dann ist } A \cup B = (A \cap B) \cup (B \cap A) \cup (A \cap B)^c = C_1 \cup \dots \cup C_n \cup D_1 \cup \dots \cup D_m \cup (A \cap B)^c.$$

$$\begin{aligned} \text{Damit folgt } \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(C_1) + \dots + \mu(C_n) + \mu(D_1) + \dots + \mu(D_m) + \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B), \text{ da } A = C_1 \cup \dots \cup C_n \cup (A \cap B) \text{ und } B = D_1 \cup \dots \cup D_m \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

Alternativ: Benutze, dass sich μ zu Inhalt auf erzeugtem Ring fortsetzt.

⑤ Lösung

Wäre $A^c \subseteq B$, so ist $A^c = B \cap A^c = B \cap A^c \in \mathcal{R}$ und damit $X = A \cup A^c \in \mathcal{R}$, also $\mathcal{R}$ eine Algebra.

Ein Widerspruch zu $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{A}$ (*)

Definiere $\bar{\mu} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ durch $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{R}$ und $\bar{\mu}(A^c) = +\infty$ für $A \in \mathcal{R}$.

Dies ist als Fkt. wohldef. (vgl. Blatt 1) und setzt μ fort. Es bleibt Additivität nachzuweisen.

Sei $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ eine disjunkte Zerlegung von $A \in \mathcal{A}$ durch Mengen $A_i \in \mathcal{A}$.

Ist $A \in \mathcal{R}$, so folgt mit (*) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ und damit $\bar{\mu}(A) = \mu(A) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) = \bar{\mu}(A_1) + \dots + \bar{\mu}(A_n)$.

Sonst ist ein $A_i \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{R}$ u-stabil ist. Dann ist $\bar{\mu}(A) = +\infty = \bar{\mu}(A_1) + \dots + \underbrace{\bar{\mu}(A_i) + \dots + \bar{\mu}(A_n)}_{=+\infty}$.

Sei X eine nichtleere Menge. Dann ist $\mathcal{R} = \{\emptyset\}$ ein Ring auf X und $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ die erzeugte Algebra.

$\mu_c : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ def. durch $\mu_c(\emptyset) = 0$ und $\mu_c(X) = c$ def. für $c \in [0, \infty]$ bel. einen Inhalt auf $\mathcal{A}$.